20/10

Πρόταση

i) A ανοικτό $\Leftrightarrow$ A περιοχή κάθε σημείο του (Αποδείχθηκε στο προηγ. μάθημα)

ii) A ανοικτό $\Leftrightarrow \partial A \subseteq A^c$

iii) A κλειστό $\Leftrightarrow A' \subseteq A$

iv) A κλειστό $\Leftrightarrow \partial A \subseteq A$

Απόδειξη

ii) ($\Rightarrow$) Έστω A ανοιχτό δηλ. $A = A^o$ κ x τυχόν στοιχείο

$x \in \partial A = \bar{A} - A^o \Leftrightarrow x \in \bar{A} \wedge x \notin A^o \xRightarrow{\text{προηγ. λογ.}} x \notin A^o \xrightarrow{A = A^o} x \notin A \Rightarrow x \in A^c$

($\Leftarrow$) Έστω $\partial A \subseteq A^c$ θ.δ.ο. $A = A^o$ (ή ισοδύναμα $A \subseteq A^o$)

Θεωρώ x τυχόν με $x \in A \Leftrightarrow x \notin A^c \Rightarrow x \notin \partial A = \bar{A} - A^o \Leftrightarrow$

$x \notin \bar{A} \vee x \in A^o \xRightarrow{x \in A \Rightarrow x \in \bar{A}} x \in A^o$

iii) ($\Rightarrow$) Έστω A κλειστό κ x ∈ A. Τότε $A = \bar{A} = A \cup A' \Rightarrow A' \subseteq A$

iv) ($\Rightarrow$) Έστω A κλειστό δηλ. $A = \bar{A}$

θ.δ.ο. $\partial A \subseteq A$. Έστω x τυχόν

$x \in \partial A = \bar{A} - A^o \Leftrightarrow x \in \bar{A} \wedge x \notin A^o \Rightarrow x \in \bar{A} \xrightarrow{A = \bar{A}} x \in A$

($\Leftarrow$) Έστω $\partial A \subseteq A$. θ.δ.ο. $A = \bar{A}$ (ή ισοδύναμα $\bar{A} \subseteq A$)

αρκεί ν.δ.ο. $x \notin A \Rightarrow x \notin \bar{A}$

$x \notin A \xRightarrow{\partial A \subseteq A} x \notin \partial A = \bar{A} - A^o \Rightarrow x \notin \bar{A} \vee x \in A^o \xRightarrow{x \notin A \Rightarrow x \notin A^o} x \notin \bar{A}$

Πρόταση

i) A ανοικτό $\Leftrightarrow A^c$ κλειστό

ii) A κλειστό $\Leftrightarrow A^c$ ανοικτό

Απόδειξη

i) ($\Rightarrow$) Έστω A ανοικτό $\Rightarrow \partial A \subseteq A^c \xRightarrow{\partial A = \partial A^c} \partial A^c \subseteq A^c \Rightarrow A^c$ κλειστό

($\Leftarrow$) Βγαίνει παρόμοια

ii) Βγαίνει παρόμοια με το (i)

Πρόταση

α) Η ένωση οσωνδήποτε ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.
β) Η τομή πεπερασμένων πλήθους ανοικτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο.

Απόδειξη

α) $A_i, i \in I$ τυχούσα οικογένεια συνόλων. Δηλ. $(\forall i \in I)\ A_i^\circ = A_i$
ισχύει $\bigcup_{i\in I} A_i^\circ \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^\circ \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^\circ \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^\circ$

β) $A_1, \dots, A_k$ ανοικτά σύνολα άρα $(\forall i = 1, 2, \dots k): A_i^\circ = A_i \quad (*)$
$\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right)^\circ = \bigcap_{i=1}^{k} A_i^\circ \overset{(*)}{=\!=} \bigcap_{i=1}^{k} A_i$

Δεν ισχύει το αντίθετο: $\underline{\pi x}$: $A_\nu = \left(-\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right)_{\nu\in\mathbb{N}}$ με $\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu = \{0\}$
άρα $\left(\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu\right)^\circ = (\{0\})^\circ = \emptyset$

αλλά $\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu^\circ = \bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu = \{0\}$

Πρόταση 1

i) Η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο
ii) Η τομή οσωνδήποτε κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο

Πρόταση 2

i) Ο πυρήνας A° του A είναι το μέγιστο ($\subseteq$) ανοιχτό υποσύνολο του A
ii) Η θήκη $\bar{A}$ του A είναι το ελάχιστο ($\subseteq$) κλειστό υπερσύνολο του A

Απόδειξη προτ. 2

i) $A^\circ \subseteq A$, $A^{\circ\circ} = A^\circ$ ($\Leftrightarrow A^\circ$ ανοικτό)
Θ.δ.ο. αν $X \subseteq A$ κ X ανοικτό τότε: $X \subseteq A^\circ$
$X \subseteq A \Rightarrow X^\circ \subseteq A^\circ \xrightarrow{X \text{ ανοικτό}} X \subseteq A^\circ$

Πόρισμα

$\mathcal{C}$ συλλογή των ανοικτών υποσύνολο του A τότε $A^\circ = \bigcup \mathcal{C}$
$\mathcal{C}$ συλλογή των υπερσυνόλων του A τότε $\bar{A} = \bigcap \mathcal{C}$

Εφαρμογή

A ανοικτό κ B κλειστό $\Longrightarrow$ A-B ανοιχτό κ B-A κλειστό

Απόδειξη

$A-B = A\cap B^c$ από προηγ. πρόταση: $A\cap B^c \to$ Ανοικτό

ανοικτό ανοικτό

$B-A = A^c \cap B$ από προηγ. πρόταση: $A^c\cap B \to$ κλειστό

κλειστό κλειστό

Πυκνά σύνολα (Ορισμός 1)

Ένα υποσύνολο A ενός μ.χ. E λέγεται πυκνό στον E $\Longleftrightarrow \bar{A}=E$

$(\Longleftrightarrow)$

ε-πυκνό (Ορισμός 2)

Έστω $\varepsilon>0$ κ $A\subseteq E$. Το A είναι ε-πυκνό στον E $\Leftrightarrow (\forall x\in E)(\exists y\in A): \rho(x,y)<\varepsilon$

Πρόταση

A πυκνό στον E $\Longleftrightarrow (\forall \varepsilon>0)$ το A είναι ε-πυκνό στον E